

В теории многочленов часто двучлены называют *биномами*. Рассмотрим целые неотрицательные степени бинорма $a + b$ (при условии $a + b \neq 0$):

$$(a + b)^0 = 1,$$

$$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b,$$

$$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2,$$

$$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3,$$

$$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b) =$$

$$= 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4,$$

$$(a + b)^5 = (a + b)^4 (a + b) =$$

$$= 1 \cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1 \cdot b^5$$

и т. д.

Можно доказать справедливость следующей формулы, называемой биномиальной формулой Ньютона:

$$(a + b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b +$$

$$+ C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \dots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \dots +$$

$$+ C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m. \quad (1)$$

Формулу (1) чаще всего называют просто *биномом Ньютона*, а числа C_m^n — *биномиальными коэффициентами*, которые могут быть найдены по формуле

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}.$$

Биномиальные коэффициенты легко находить с помощью так называемого *треугольника Паскаля* — таблицы значений C_m^n , составленной на основании рекуррентного свойства числа сочетаний $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$ с учётом того, что $C_m^0 = C_m^m = 1$.

Ниже приводится фрагмент треугольника Паскаля, в котором стрелками показан процесс получения определённых членов таблицы на основании рекуррентного свойства. Например, при $m = 4$ имеем строку 1, 4, 6, 4, 1, полученную из предыдущей строки следующим образом: $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$ (первый и последний члены строки равны $C_4^0 = C_4^4 = 1$).

$\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	$1 \oplus$	1									
2	$1 \oplus$	$2 \oplus$	1								
3	$1 \oplus$	$3 \oplus$	$3 \oplus$	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	7	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Эта таблица наглядно иллюстрирует свойство 1 числа сочетаний $C_m^n = C_m^{m-n}$, которое можно сформулировать так: числа, одинаково удалённые от концов строки треугольника Паскаля, равны.

Задача 1

Записать разложение бинома $(x - 2)^6$.

► По формуле (1) находим

$$\begin{aligned} (x - 2)^6 &= (x + (-2))^6 = \\ &= C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \cdot (-2) + C_6^2 x^4 \cdot (-2)^2 + C_6^3 x^3 \cdot (-2)^3 + \\ &\quad + C_6^4 x^2 \cdot (-2)^4 + C_6^5 x \cdot (-2)^5 + C_6^6 \cdot (-2)^6 = \\ &= x^6 + 6x^5 \cdot (-2) + 15x^4 \cdot 4 + 20x^3 \cdot (-8) + \\ &\quad + 15x^2 \cdot 16 + 6x \cdot (-32) + 64 = \\ &= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64. \triangleleft \end{aligned}$$

Заметим, что при записи разложения степени бинома полезно контролировать следующие моменты: 1) число членов получаемого многочлена на единицу больше показателя m степени бинома, т. е. равно $m + 1$;

2) показатели степени первого слагаемого бинома последовательно убывают на единицу от m до 0, а показатели второго последовательно возрастают на единицу от 0 до m ;

3) биномиальные коэффициенты, равноудалённые от начала и конца разложения по формуле (1), равны между собой.

Задача 2

Доказать свойство элементов строки треугольника Паскаля:

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m. \quad (2)$$

► Равенство (2) получается из равенства (1) при $a = b = 1$. ◀

Задача 3*

Найти член разложения $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, содержащий x^2 .

► $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$. Общий член разложе-

ния десятой степени бинома $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ имеет вид

$C_{10}^n \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n$. Для того чтобы некоторый член этого разложения содержал x^2 , должно выполняться равенство

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n = x^2. \quad (3)$$

Но $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n = x^{5-\frac{n}{2}} \cdot x^{-\frac{n}{2}} = x^{5-n}$. Равенство (3) выполняется при $5-n=2$, т. е. при $n=3$. При $n=3$ имеем $C_{10}^3 = 120$.

Ответ

$120x^2$. ◀

Упражнения

1092 Записать разложение бинома:

- 1) $(1+x)^8$; 2) $(x+1)^7$; 3) $(a-1)^9$; 4) $(y-1)^{10}$;
 5) $(2x+1)^5$; 6) $(x+2)^6$; 7) $(3x+2)^4$; 8) $(2a+3)^5$;
 9) $\left(2a-\frac{1}{2}\right)^5$; 10) $\left(3x-\frac{1}{3}\right)^4$.

1093 Записать разложение бинома:

- 1) $(1+\sqrt{2})^6$; 2) $(1+\sqrt{3})^5$; 3) $\left(a-\frac{1}{3a}\right)^7$; 4) $\left(b-\frac{1}{2b}\right)^6$.